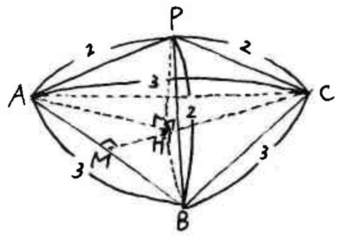
三角比（2003年北大）

(1) Pから底面ABCに下ろした垂線の足をHとする。



直角三角形PHA, PHB, PHCにおいて, $PA=PB=PC$, PHが共通だから,

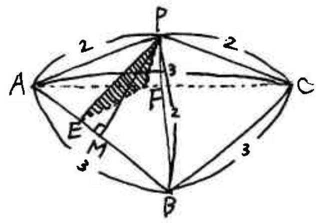
3つの三角形は合同である。よってAH = BH = CHだから, Hは△ABCの外心である。

正三角形ABCの外心と重心は一致するから, Hは△ABCの重心である。

よって, ABの中点をMとすると, $CH=\frac{2}{3}CM=\frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ だから, $PH=\sqrt{PC^2-CH^2}=\sqrt{4-3}=1$

∴ 求める体積は, $\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot PH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot1=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(2) $AE=AF$, $\angle EAF=60^\circ$ だから, $\angle AEF=\angle AFE=\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ$



よって△AEFは正三角形だから, $AE=AF=EF=x$ とおける。

また, $\cos\angle PAE=\frac{AM}{PA}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$

よって△PAEに余弦定理を用いると, $PE^2=x^2+4-2\cdot x\cdot 2\cdot\frac{3}{4}=x^2-3x+4$ より, $PE=\sqrt{x^2-3x+4}$

△PAEと△PAFにおいて, AE = AF, APが共通, △PAB ≡ △PACより∠PAE = ∠PAFだから,

△PAE ≡ △PAF　よって, $PF=PE=\sqrt{x^2-3x+4}$

また $\cos\angle EPF=\frac{4}{5}$ だから, △EPFに余弦定理を用いると, $x^2=2(x^2-3x+4)-2(x^2-3x+4)\cdot\frac{4}{5}$

$5x^2=2x^2-6x+8$　　$3x^2+6x-8=0$　　$x>0$ より　$x=\frac{-3+\sqrt{33}}{3}$

∴ 求める長さは $\frac{-3+\sqrt{33}}{3}$