

微分 (2007年北大)

(1) $V = \pi a^2 b + \frac{1}{3} \pi a^2 c$ $S = \pi a \sqrt{a^2 + c^2} + 2\pi a b$

(2) (i) (1)より. $V = \pi a^3 x + \frac{1}{3} \pi a^3 y = \pi a^3 (x + \frac{y}{3})$ - ①

$S = \pi a \sqrt{a^2 + a^2 y^2} + 2\pi a^2 x = \pi a^2 (\sqrt{1+y^2} + 2x)$ - ②

①より. $x + \frac{y}{3} = \frac{V}{\pi a^3}$ $x = -\frac{y}{3} + \frac{V}{\pi a^3}$ - ①'

①', ②より. $S = \pi a^2 (\sqrt{1+y^2} - \frac{2}{3}y + \frac{2V}{\pi a^3})$

$f(y) = \sqrt{1+y^2} - \frac{2}{3}y + \frac{2V}{\pi a^3}$ とおくと. $f'(y) = \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}} - \frac{2}{3} = \frac{3y - 2\sqrt{1+y^2}}{3\sqrt{1+y^2}}$

$f'(y) = 0$ のとき. $3y = 2\sqrt{1+y^2}$ $9y^2 = 4 + 4y^2$ $5y^2 = 4$ $y^2 = \frac{4}{5}$ $y > 0$ より. $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$x > 0, y > 0$ なるから. ①'より. $0 < y < \frac{3V}{\pi a^3}$

(ア) $\frac{3V}{\pi a^3} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$ ならば $(\frac{3\sqrt{5}}{2\pi} V)^{\frac{1}{3}} \leq a$ のとき

$f'(y) < 0$ なるから. $f(y)$ は単調に減少する. よって S の最小値はよい.

(イ) $\frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{3V}{\pi a^3}$ ならば $a < (\frac{3\sqrt{5}}{2\pi} V)^{\frac{1}{3}}$ のとき

増減表は右のようになるから. $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ のとき S は最小となる.

y	0	...	$\frac{2}{\sqrt{5}}$...	$\frac{3V}{\pi a^3}$
$f'(y)$		-	0	+	
$f(y)$			極小		

このとき. $S = \pi a^2 (\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2V}{\pi a^3}) = \frac{\sqrt{5}}{3} \pi a^2 + \frac{2V}{a}$

(ア), (イ)より. $0 < a < (\frac{3\sqrt{5}}{2\pi} V)^{\frac{1}{3}}$ のとき. $T = \frac{\sqrt{5}}{3} \pi a^2 + \frac{2V}{a}$

(ii) (i)より. $\frac{dT}{da} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \pi a - \frac{2V}{a^2} = \frac{2}{a^2} (\frac{\sqrt{5}}{3} \pi a^3 - V)$

$\frac{dT}{da} = 0$ のとき. $a^3 = \frac{3\sqrt{5}}{5\pi} V$ $a = (\frac{3\sqrt{5}}{5\pi} V)^{\frac{1}{3}}$

a	0	...	$(\frac{3\sqrt{5}}{5\pi} V)^{\frac{1}{3}}$...	$(\frac{3\sqrt{5}}{2\pi} V)^{\frac{1}{3}}$
$\frac{dT}{da}$		-	0	+	
T			極小		

増減表は右のようになるから. $a = (\frac{3\sqrt{5}}{5\pi} V)^{\frac{1}{3}}$ のとき T は最小となる.

このとき. (2)(i)より $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ なるから. ①'より. $x = -\frac{2}{3\sqrt{5}} + \frac{V}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{3\sqrt{5}V} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore a : b : c = 1 : x : y = 1 : \frac{1}{\sqrt{5}} : \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} : 1 : 2$