

確率 (2024年北大)

(1)  $n$ 回の試行後に2点以下であるのは、次の3通りである。

(i)  $n$ 回とも0のとき この確率は  $(\frac{5}{8})^n$

(ii) 1回のみ1か2が出て、他の $(n-1)$ 回は0のとき この確率は  ${}^n C_1 \cdot \frac{2}{8} \cdot (\frac{5}{8})^{n-1} = \frac{n}{4} (\frac{5}{8})^{n-1}$

(iii) 2回のみ1か2が出て、他の $(n-2)$ 回は0のとき この確率は  ${}^n C_2 \cdot (\frac{1}{8})^2 (\frac{5}{8})^{n-2} = \frac{1}{128} n(n-1) (\frac{5}{8})^{n-2}$

$$\therefore \text{求める確率は } (\frac{5}{8})^n + \frac{n}{4} (\frac{5}{8})^{n-1} + \frac{1}{128} n(n-1) (\frac{5}{8})^{n-2} = (\frac{5}{8})^n \left\{ 1 + \frac{2}{5}n + \frac{1}{50}n(n-1) \right\} = \frac{n^2 + 19n + 50}{50} (\frac{5}{8})^n$$

(2) 4回の試行後に10点以上である事象をA, 6回の試行後に17点以上である事象をBとする。

Aは次の3通りである。

(i) 4回の試行後に10点のとき この確率は、3回3が出て1回1が出る確率と、3と2が2回ずつ出る確率の和

$$\text{だから、} {}^4 C_3 \cdot (\frac{1}{8})^3 \cdot \frac{1}{8} + {}^4 C_2 \cdot (\frac{1}{8})^2 (\frac{1}{8})^2 = 10 (\frac{1}{8})^4$$

(ii) 4回の試行後に11点のとき この確率は、3回3が出て1回2が出る確率だから、 ${}^4 C_3 (\frac{1}{8})^3 \cdot \frac{1}{8} = 4 (\frac{1}{8})^4$

(iii) 4回の試行後に12点のとき この確率は、4回とも3の確率だから、 $(\frac{1}{8})^4$

$$(i) \sim (iii) \text{より、} P(A) = 10 (\frac{1}{8})^4 + 4 (\frac{1}{8})^4 + (\frac{1}{8})^4 = 15 (\frac{1}{8})^4$$

$A \cap B$ は次の3通りである。

(a) 4回の試行後に11点であり、その後2回3が出るとき この確率は、 $4 (\frac{1}{8})^4 \times (\frac{1}{8})^2 = 4 (\frac{1}{8})^6$

(b) 4回の試行後に12点であり、その後2と3が1回ずつ出るとき この確率は、 $(\frac{1}{8})^4 \times {}^2 C_1 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = 2 (\frac{1}{8})^6$

(c) 4回の試行後に12点であり、その後2回3が出るとき この確率は、 $(\frac{1}{8})^4 \times (\frac{1}{8})^2 = (\frac{1}{8})^6$

$$(a) \sim (c) \text{より、} P(A \cap B) = 4 (\frac{1}{8})^6 + 2 (\frac{1}{8})^6 + (\frac{1}{8})^6 = 7 (\frac{1}{8})^6$$

$$\therefore \text{求める確率は、} P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{7 (\frac{1}{8})^6}{15 (\frac{1}{8})^4} = \frac{7}{960}$$