複素数列（2004年北大）

(1) $z_2=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1+1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+1=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$ $\quad z_3=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_2+1=\dfrac{(1+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}{4}+1=1+i\sqrt{3}$

(2) $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\alpha)$ より．$z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\alpha$ これと $z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1$ を比較して．$\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}=1$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}=\dfrac{2(1+i\sqrt{3})}{4}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

(3) (2)より．数列 $\{z_n-\alpha\}$ は初項 $z_1-\alpha=1-\alpha$，公比 α の等比数列だから．$z_n-\alpha=(1-\alpha)\alpha^{n-1}$

$\therefore\ z_n=(1-\alpha)\alpha^{n-1}+\alpha=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-2}+\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-2}+\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

(4) $z_n=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき．(3)より．$\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-2}+\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ $\quad\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-2}=-1$ —①

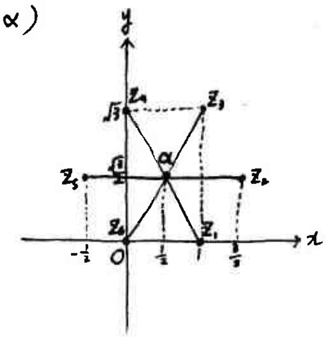
$\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-2}=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{n-2}=\cos\dfrac{n-2}{3}\pi+i\sin\dfrac{n-2}{3}\pi$ —②

①，②より．k を整数として．$\dfrac{n-2}{3}\pi=\pi+2k\pi$ $\quad n-2=3+6k$ $\quad n=6k+5$

n は自然数だから．$k\geqq 0$ $\qquad\therefore\ n=6k+5$（k は0以上の整数）

（別解）(3) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ だから．$z_{n+1}-\alpha=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(z_n-\alpha)$

よって．点 z_{n+1} は点 z_n を点 α のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点である。



$\therefore$ k を0以上の整数として．

$n=6k+1$ のとき $z_n=1$ $\qquad n=6k+2$ のとき $z_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$n=6k+3$ のとき $z_n=1+\sqrt{3}i$ $\qquad n=6k+4$ のとき $z_n=\sqrt{3}i$

$n=6k+5$ のとき $z_n=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad n=6k+6$ のとき $z_n=0$

(4) (3)より．$n=6k+5$（k は0以上の整数）