通過領域（2003年北大）

(1) x_1，x_2 は．$x^2=-(x-a)^2+b$ すなわち $2x^2-2ax+a^2-b^2=0$ ー① の2解だから．

①の判別式を D_1 とすると．$\dfrac{D_1}{4}=a^2-2(a^2-b)=-a^2+2b>0$ より．$b>\dfrac{1}{2}a^2$ ー②

解と係数の関係より．$x_1+x_2=a$，$x_1x_2=\dfrac{1}{2}(a^2-b)$ ー③　また．$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$ ー④

③，④より．$(x_1-x_2)^2=a^2-2(a^2-b)=-a^2+2b$ ー⑤

$x_1-x_2=2$ 及び⑤より．$-a^2+2b=4$　$b=\dfrac{1}{2}a^2+2$ ー⑥

⑥は②をみたす。　$\therefore\ b=\dfrac{1}{2}a^2+2$

(2) 直線PQの方程式は．$y=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}(x-x_1)+x_1^2$ すなわち $y=(x_1+x_2)x-x_1x_2$ ー⑦

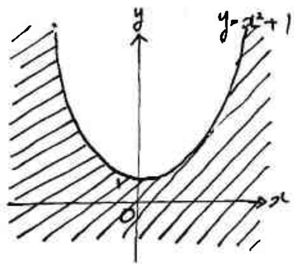
③，⑥，⑦より．$y=ax-\dfrac{1}{2}\left(a^2-\dfrac{1}{2}a^2-2\right)$　$y=ax-\dfrac{1}{4}a^2+1$ ー⑦′

求める領域は．⑦′をaの2次方程式とみなしたとき実数解をもつような x，y の条件を図示したものである。

⑦′より．$a^2-4xa+4y-4=0$ ー⑦″

⑦″の判別式を D_2 とすると．求める条件は．$\dfrac{D_2}{4}=4x^2-4y+4\geqq 0$

すなわち $y\leqq x^2+1$　∴ 求める領域は右図の斜線部（境界を含む）。



(3) $|\overrightarrow{PQ}|^2=(x_1-x_2)^2+(x_1^2-x_2^2)^2=(x_1-x_2)^2\{1+(x_1^2+x_2^2)\}$ ー⑧

③，⑤，⑧より．$|\overrightarrow{PQ}|^2=(-a^2+b)(1+a^2)$ ー⑨

$|\overrightarrow{PQ}|=2$ 及び⑨より．$(-a^2+2b)(1+a^2)=4$　$-a^2+2b=\dfrac{4}{a^2+1}$　$b=\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{2}{a^2+1}$ ー⑩

線分PQの中点のy座標をYとすると，$Y=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}=\dfrac{1}{2}\{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\}$ ー⑪

③，⑪より．$Y=\dfrac{1}{2}(a^2-a^2+b)=\dfrac{b}{2}$ ー⑫　⑩，⑫より．$Y=\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{a^2+1}=\dfrac{a^2+1}{4}+\dfrac{1}{a^2+1}-\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{a^2+1}{4}>0$，$\dfrac{1}{a^2+1}>0$ だから．相加・相乗平均の関係より．$Y\geqq 2\sqrt{\dfrac{a^2+1}{4}\cdot\dfrac{1}{a^2+1}}-\dfrac{1}{4}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

等号は $\dfrac{a^2+1}{4}=\dfrac{1}{a^2+1}$ すなわち $a=\pm 1$，$b=\dfrac{3}{2}$ のとき成り立つ。

∴ 求める最小値は $\dfrac{3}{4}$