面積（2011年北大）

(1) CがP, Qを通るから，$3=a-b+c$ —① $4=a+b+c$ —②

①, ②より，$1=2b$ $\therefore b=\frac{1}{2}$，$c=4-a-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}-a$

(2) (1)よりCの方程式は，$y=ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-a$ $y'=2ax+\frac{1}{2}$

l_1の方程式は，$y=(-2a+\frac{1}{2})(x+1)+3$ すなわち $y=(-2a+\frac{1}{2})x-2a+\frac{7}{2}$ —③

l_2の方程式は，$y=(2a+\frac{1}{2})(x-1)+4$ すなわち $y=(2a+\frac{1}{2})x-2a+\frac{7}{2}$ —④

③, ④を連立すると，$(2a+\frac{1}{2})x-2a+\frac{7}{2}=(-2a+\frac{1}{2})x-2a+\frac{7}{2}$ $4ax=0$ $a\neq0$だから，$x=0$

$y=-2a+\frac{7}{2}$ $\therefore$ 求める座標は $(0,\ -2a+\frac{7}{2})$

(3) C, l_1, l_2で囲まれる図形の面積をSとすると，

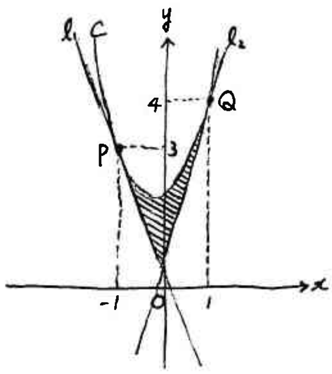
$$S=\int_{-1}^{0}\left\{ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-a-(-2a+\frac{1}{2})x+2a-\frac{7}{2}\right\}+\int_{0}^{1}\left\{ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-a-(2a+\frac{1}{2})x+2a-\frac{7}{2}\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(ax^2+2ax+a)\,dx+\int_{0}^{1}(ax^2-2ax+a)\,dx$$

$$=a\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+a\int_{0}^{1}(x-1)^2dx$$

$$=a\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0}+a\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}a=1 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$$



(補足) $y=ax^2+bx+c$の2接線の交点のx座標は，2接点のx座標をα, β (α<β)とすると，$\frac{\alpha+\beta}{2}$となる。

さらに，放物線と2接線が囲む面積は $\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$となる。これらを覚えると，検算に使える。