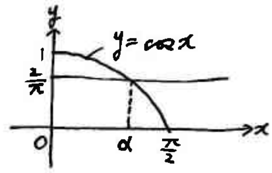
面積（2018年北大）

(1) $F(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$ とおくと、$F'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$



$\cos x=\frac{2}{\pi}$，$0<x<\frac{\pi}{2}$ をみたす x がただ1つ存在するから、これを α とすると

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	↗	極大	↘	0

増減表は右のようになる。よって、$F(x)\geqq 0$ だから、$\frac{2}{\pi}x\leqq\sin x$ が成り立つ。

(2) $g(x)\leqq f(x)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\leqq\cos x+\frac{\pi}{2}$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき、$\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}>0$，$\cos x+\frac{\pi}{2}>0$ だから、$g(x)\leqq f(x)\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{2}-x^2\leqq\left(\cos x+\frac{\pi}{2}\right)^2$

$h(x)=\left(\cos x+\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi^2}{2}-x^2\right)$ とおくと、$h(x)=\cos^2x+\pi\cos x+x^2-\frac{\pi^2}{4}$

$h'(x)=2\cos x\cdot(-\sin x)-\pi\sin x+2x=-\sin 2x-\pi\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき、$-\sin 2x\leqq 0$，また(1)より $-\pi\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)\leqq 0$ だから、$h'(x)\leqq 0$

よって $h(x)$ は単調に減少し、$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ だから、$h(x)\geqq 0$　すなわち $\left(\cos x+\frac{\pi}{2}\right)^2\geqq\frac{\pi^2}{2}-x^2$

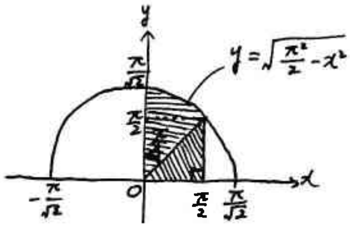
$\therefore$ $g(x)\leqq f(x)$ が成り立つ。

(3) 求める面積を S とすると、(2)より、

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\right)dx \quad -①$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\left[\sin x+\frac{\pi}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1+\frac{\pi^2}{4} \quad -②$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^3}{16}+\frac{\pi^2}{8} \quad -③$$



①〜③より、求める面積は、$1+\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^3}{16}-\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^3}{16}$

(2)別解　$G(x)=f(x)-g(x)$ とおくと、$G'(x)=-\sin x-\frac{-2x}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}-\sin x$

(1)より $-\sin x\leqq-\frac{2}{\pi}x$ だから、$G'(x)\leqq\frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}-\frac{2}{\pi}x=\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}-\frac{2}{\pi}\right)x$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき、$\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\geqq\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{\pi}{2}$ だから、$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}\leqq\frac{2}{\pi}$　よって $G'(x)\leqq 0$

よって $G(x)$ は単調に減少し、$G\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ だから、$G(x)\geqq 0$　$\therefore$ $g(x)\leqq f(x)$ が成り立つ。