

面積(1) (2022年京大)

曲線  $C: y = \cos^3 x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ).  $x$  軸及び  $y$  軸で囲まれる図形の面積を  $S$  とする。  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  とし、  $C$  上の

点  $Q(t, \cos^3 t)$  と原点  $O$ , 及び  $P(t, 0)$ ,  $R(0, \cos^3 t)$  を頂点にもつ長方形  $OPQR$  の面積を  $f(t)$  とする。

(1)  $S$  を求めよ。

(2)  $f(t)$  は最大値をただ一つの  $t$  でとることを示せ。そのときの  $t$  を  $\alpha$  とすると、  $f(\alpha) = \frac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$  であることを示せ。

(3)  $\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{9}{16}$  を示せ。