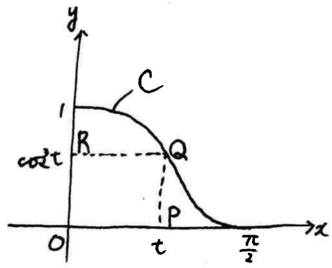
面積(1) (2022年京大)

(1) Cの概形は右図のようになるから.



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin^2 x \cos x)\,dx$$

$$= \left[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

(2) $f(t) = t\cos^3 t$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ だから. $f'(t) = \cos^3 t + t\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t) = \cos^2 t\,(\cos t - 3t\sin t)$

$g(t) = \cos t - 3t\sin t$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと. $\cos t$ 及び $-3t\sin t$ は単調に減少するから.

$g(t)$は単調に減少する。さらに. $g(0) = 1 > 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}\pi < 0$ だから. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ において

$g(t) = 0$ をみたすtがただ1つ存在する。このときt_0とすると.

$f(t)$の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	t_0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

∴ $f(t)$は最大値をただ1つの$t = t_0$でとる。

$\alpha = t_0$だから. $f(\alpha) = \alpha\cos^3\alpha$ —① $g(t_0) = 0$ だから. $\cos t_0 - 3t_0\sin t_0 = 0$ —②

$0 < t_0 < \frac{\pi}{2}$ より. $\sin t_0 \neq 0$ —③ ②,③より. $t_0 = \dfrac{\cos t_0}{3\sin t_0}$

これと $t_0 = \alpha$ より. $\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{3\sin\alpha}$ —④ ①,④より. $f(\alpha) = \dfrac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$

(3) (1),(2)より. $\dfrac{f(\alpha)}{S} = \dfrac{\frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}\cdot\cos^4\alpha\cdot\dfrac{1}{\sin\alpha}$ —⑤ $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{4}$ —⑥

$1.7 < \sqrt{3}$ より. $3.4 < 2\sqrt{3}$ これと $\pi < 3.4$ より. $\pi < 2\sqrt{3}$ —⑦

⑥,⑦より. $g\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$ これと(2)より. $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

よって $0 < \cos\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha > \frac{1}{2}$ だから. $0 < \cos^4\alpha < \frac{9}{16}$ —⑧ $0 < \dfrac{1}{\sin\alpha} < 2$ —⑨

⑤,⑧,⑨より. $\dfrac{f(\alpha)}{S} < \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{16}\cdot 2$ ∴ $\dfrac{f(\alpha)}{S} < \dfrac{9}{16}$

(1)別解 $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ より. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ だから.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x + 3\cos x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}+3\right) = \frac{2}{3}$$