確率と漸化式(1)（2022年一橋大）

赤玉2つと白玉1つが入った箱をA，赤玉1つと白玉2つが入った箱をB．n回目にAを選ぶ確率をa_nとすると．

n回目に赤玉を取り出す確率は．$a_n \cdot \frac{2}{3} + (1-a_n)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}$ ―①

また．(1)，(2)のいずれの場合も $a_1 = \frac{1}{2}$ ―②

(1) (n+1)回目にAを選ぶのは．以下のいずれかの場合である。

(i) n回目にAを選び赤玉を取り出す。

(ii) n回目にBを選び白玉を取り出す。

よって．$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2}{3} + (1-a_n)\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ $(n \geqq 1)$ だから．$n \geqq 2$ のとき $a_n = \frac{2}{3}$ ―③

①～③より．$n=1$ のとき $p_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$　　$n \geqq 2$ のとき $p_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

(2) (n+1)回目にAを選ぶのは．以下のいずれかの場合である。

(i) n回目にAを選び赤玉を取り出す。

(ii) n回目にAを選び白玉を取り出し．確率$\frac{1}{2}$でAを選ぶ。

(iii) n回目にBを選び白玉を取り出し．確率$\frac{1}{2}$でAを選ぶ。

よって．$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2}{3} + a_n \cdot \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + (1-a_n)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}$ より．$a_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right)$

数列$\left\{a_n - \frac{2}{3}\right\}$は初項 $a_1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$．公比$\frac{1}{2}$の等比数列だから．

$a_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3\cdot 2^n}$ より．$a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^n}$ ―④

①，④より．$q_n = \frac{2}{9} - \frac{1}{9\cdot 2^n} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9} - \frac{1}{9\cdot 2^n}$