No.

Date

〈放物線と接線が囲む面積〉

$$\boxed{\int (x-\alpha)^2 dx = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + C}$$ [$\frac{1}{3}$公式]

(例)　aを正の実数，bとcを実数とし，2点P$(-1,3)$，Q$(1,4)$を通る放物線$y=ax^2+bx+c$をCとする。

また，P，QにおけるCの接線をそれぞれl_1，l_2とする。Cとl_1，l_2で囲まれる図形の面積をaで表せ。

(2011年 北大・改)

CがP，Qを通るから，$3=a-b+c$ －①　$4=a+b+c$ －②

①，②より，$1=2b$　$b=\frac{1}{2}$ －③　②，③より，$c=4-a-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}-a$

よってCの方程式は，$y=ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-a$　$y'=2ax+\frac{1}{2}$

l_1の方程式は，$y=(-2a+\frac{1}{2})(x+1)+3$　すなわち　$y=(-2a+\frac{1}{2})x-2a+\frac{7}{2}$ －④

l_2の方程式は，$y=(2a+\frac{1}{2})(x-1)+4$　すなわち　$y=(2a+\frac{1}{2})x-2a+\frac{7}{2}$ －⑤

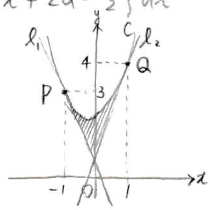
④，⑤より，l_1とl_2の交点のx座標は，$(2a+\frac{1}{2})x-2a+\frac{7}{2}=(-2a+\frac{1}{2})x-2a+\frac{7}{2}$　$4ax=0$

$a\neq 0$より　$x=0$　　よって，求める面積は，

$$\int_{-1}^{0}\left\{ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-a-(-2a+\frac{1}{2})x+2a-\frac{7}{2}\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-a-(2a+\frac{1}{2})x+2a-\frac{7}{2}\right\}dx$$

$$=a\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+a\int_{0}^{1}(x-1)^2dx=a\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+a\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}a$$



(補足)　$y=ax^2+bx+c\ (a>0)$上の点$(\alpha, a\alpha^2+b\alpha+c)$における接線$y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c$と

点$(\beta, a\beta^2+b\beta+c)\ (\alpha<\beta)$における接線$y=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$の交点の$x$座標は，

$(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$より　$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ －Ⓐ

よって，放物線と2接線が囲む面積は，

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}a(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}a(x-\beta)^2dx=a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+a\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{a}{24}(\beta-\alpha)^3+\frac{a}{24}(\beta-\alpha)^3=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$$

$a<0$のときは，$\frac{-a}{12}(\beta-\alpha)^3$となり，$a$の符号によらず，$\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$ －Ⓑ

Ⓐ，Ⓑを覚えておき，検算に使えるようにしたい。