

二次関数のグラフと二次方程式の解

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) の右辺を平方完成すると

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) + c = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$y = ax^2 + bx + c$ のグラフは、 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ を頂点とする放物線である。よって、 $D = b^2 - 4ac$ とすると

放物線と x 軸の位置関係は、右図のように

D の符号によって変わる。

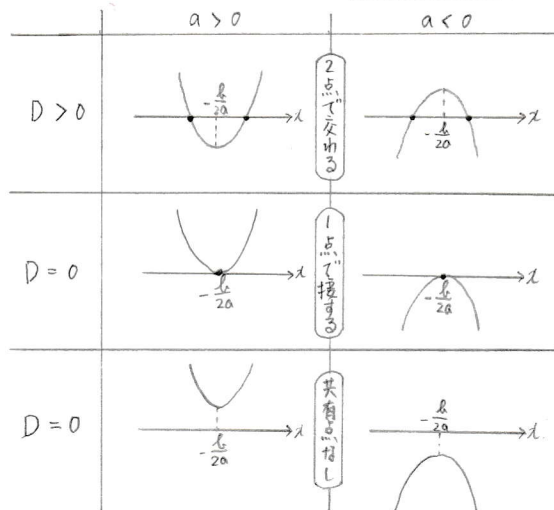
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解は、放物線と

x 軸の共有点の x 座標だから、次のようになる。

$$D > 0 \Leftrightarrow \text{異なる2つの実数解をもつ}$$

$$D = 0 \Leftrightarrow \text{ただ1つの実数解(重解)をもつ}$$

$$D < 0 \Leftrightarrow \text{実数解をもたない}$$



このように、 D の符号で実数解の個数を判別できるため、 $D (= b^2 - 4ac)$ を判別式という。

(discriminant) ← discriminate
区別する

$ax^2 + bx + c = 0$ を解くと、

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad [\text{解の公式}]$$

2解を α, β とすると、 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta = 0$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad [\text{解と係数の関係}]$$

符号に注意!

→ 数学IIで学ぶ

(補足) $b = 2b'$ のとき、 $D = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$ より $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$ となるから、 $b'^2 - ac$ の符号で

実数解の個数を判別できる。また、解の公式より、 $x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$ となる。

b が偶数のときは、 b を2で割った値を b' とし、 $x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$ とし解く方が速い。