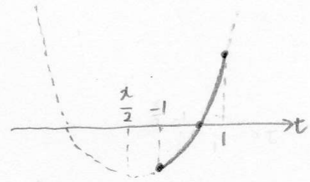
通過領域（関西大）

ℓ は $P(t,0)$ を通り $\overrightarrow{QP}=(t,-1)$ に垂直だから、ℓ の方程式は、$t(x-t)-y=0$　すなわち　$t^2-xt+y=0$ ―(*)

ℓ が点 (x,y) を通る条件は、t の2次方程式(*)が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲に実数解をもつことであり、以下でその条件を求める。

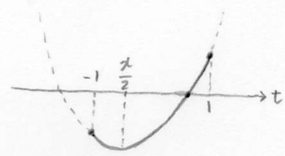
(*)の左辺を $f(t)$ とおくと、$f(t)=\left(t-\frac{x}{2}\right)^2+y-\frac{x^2}{4}$

(i) $\frac{x}{2}\leqq -1$ すなわち $x\leqq -2$ のとき



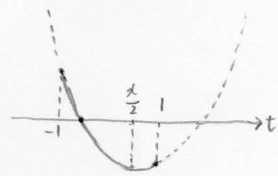
$f(-1)=1+x+y\leqq 0\leqq f(1)=1-x+y$　すなわち　$x-1\leqq y\leqq -x-1$

(ii) $-1<\frac{x}{2}<0$ すなわち $-2<x<0$ のとき



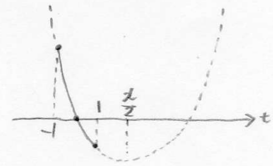
$f\left(\frac{x}{2}\right)=y-\frac{x^2}{4}\leqq 0\leqq f(1)=1-x+y$　すなわち　$x-1\leqq y\leqq \frac{1}{4}x^2$

(iii) $0\leqq \frac{x}{2}<1$ すなわち $0\leqq x<2$ のとき



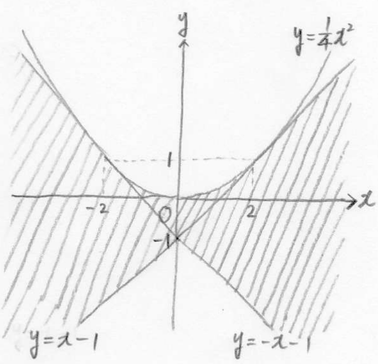
$f\left(\frac{x}{2}\right)=y-\frac{x^2}{4}\leqq 0\leqq f(-1)=1+x+y$　すなわち　$-x-1\leqq y\leqq \frac{1}{4}x^2$

(iv) $1\leqq \frac{x}{2}$ すなわち $2\leqq x$ のとき



$f(1)=1-x+y\leqq 0\leqq f(-1)=1+x+y$　すなわち　$-x-1\leqq y\leqq x-1$

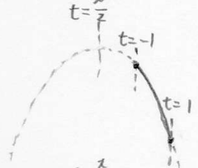
(i)～(iv)より、求める領域は右図の斜線部（境界を含む）。



(別解)　(*)より、$y=-\left(t-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x^2}{4}$

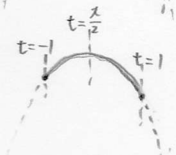
この右辺を $g(t)$ とおき、$-1\leqq t\leqq 1$ における y の値域を求める。

(i) $\frac{x}{2}\leqq -1$　すなわち $x\leqq -2$ のとき



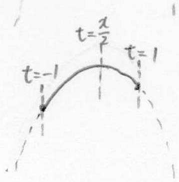
$g(1)=x-1\leqq y\leqq g(-1)=-x-1$

(ii) $-1<\frac{x}{2}<0$ すなわち $-2<x<0$ のとき



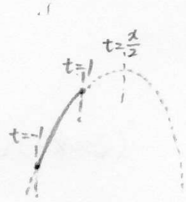
$g(1)=x-1\leqq y\leqq g\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}x^2$

(iii) $0\leqq \frac{x}{2}<1$ すなわち $0\leqq x<2$ のとき



$g(-1)=-x-1\leqq y\leqq g\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}x^2$

(iv) $1\leqq \frac{x}{2}$ すなわち　$2\leqq x$ のとき



$g(-1)=-x-1\leqq y\leqq g(1)=x-1$

(補足) 私は、上の解法を「逆像法」、下の解法を「Fax法」と呼んでいます。　(類題) 青 II 124, 2006神