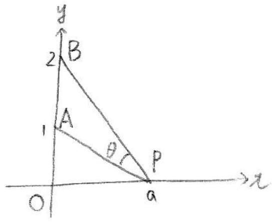
微分(3) (2006年 北大)



(1) $AP=\sqrt{a^2+1}$, $BP=\sqrt{a^2+4}$, $AB=1$ だから、$\triangle APB$ に余弦定理を用いると

$$\cos\theta=\frac{a^2+1+a^2+4-1}{2\sqrt{a^2+1}\sqrt{a^2+4}}=\frac{a^2+2}{\sqrt{(a^2+1)(a^2+4)}}$$

(2) (1)より $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{(a^2+2)^2}{(a^2+1)(a^2+4)}}$ 　$a^2=t\ (>0)$ とおくと、$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{(t+2)^2}{(t+1)(t+4)}}$

$f(t)=\dfrac{(t+2)^2}{(t+1)(t+4)}$ とおくと、$\cos\theta=\sqrt{f(t)}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だから、$\cos\theta$ は単調に減少する。よって、$f(t)$ が最小のとき θ が最大となる。

$$f'(t)=\frac{2(t+2)(t^2+5t+4)-(t+2)^2(2t+5)}{(t+1)^2(t+4)^2}=\frac{(t+2)(2t^2+10t+8-2t^2-9t-10)}{(t+1)^2(t+4)^2}=\frac{(t+2)(t-2)}{(t+1)^2(t+4)^2}$$

増減表は右のようになるから、$f(t)$ が最小となるのは $t=2$ のときである。

t	0	…	2	…
$f'(t)$	/	−	0	+
$f(t)$	/	↘	極小	↗

∴ $a>0$ より、求める値は $a=\sqrt{2}$

(2)別解 (a) $a^2+2=u\ (>2)$ とおくと、$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{u^2}{(u-1)(u+2)}}=\sqrt{\dfrac{1}{1+\frac{1}{u}-\frac{2}{u^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{-2\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}}}$

$g(u)=-2\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$ とおくと、$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{g(u)}}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だから $\cos\theta$ は単調に減少する。よって $g(u)$ が最大のとき、θ が最大となる。

このとき $\frac{1}{u}=\frac{1}{4}$ より $u=4$ だから、$a^2+2=4$ 　∴ $a>0$ より、求める値は $a=\sqrt{2}$

(b) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{(a^2+1)(a^2+4)}{(a^2+2)^2}$ 　$\tan^2\theta=\dfrac{a^4+5a^2+4-a^4-4a^2-4}{(a^2+2)^2}=\left(\dfrac{a}{a^2+2}\right)^2$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だから、$\tan\theta>0$ 　また $\dfrac{a}{a^2+2}>0$ より $\tan\theta=\dfrac{a}{a^2+2}=\dfrac{1}{a+\frac{2}{a}}$

$\tan\theta$ は単調に増加し、$a+\frac{2}{a}>0$ だから、$a+\frac{2}{a}$ が最小のとき、θ が最大となる。

$a>0$, $\frac{2}{a}>0$ だから 相加・相乗平均の関係より $a+\frac{2}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{2}{a}}=2\sqrt{2}$

等号は $a=\frac{2}{a}$ すなわち $a=\sqrt{2}$ のとき成り立つ。　∴ 求める値は $a=\sqrt{2}$

(c) $\angle OPA=\theta_1$, $\angle OPB=\theta_2$ とおくと、$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\dfrac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}=\dfrac{\frac{2}{a}-\frac{1}{a}}{1+\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{a}}=\dfrac{1}{a+\frac{2}{a}}$

(以下は(b)と同様)

(d) A, Bを通り、x軸の正の部分に接する円を考えると、Pが円とx軸の接点上にあるとき

θ が最大となる。このとき、方べきの定理より、$OP^2=OA\cdot OB$ だから、$a^2=1\cdot 2$

∴ $a>0$ より、求める値は $a=\sqrt{2}$