単振動(2) (2006年北大)

問1 板の位置をdとすると力のつり合いより $kd=mg$ ∴ $d=\frac{mg}{k}$ (1)

位置エネルギーの和は $mg\cdot\left(-\frac{mg}{k}\right)+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2=-\frac{(mg)^2}{k}+\frac{(mg)^2}{2k}=-\frac{(mg)^2}{2k}$ (2)

問2 振動の中心の位置をx_1とすると、力のつり合いより $kx_1=3mg$ ∴ $x_1=\frac{3mg}{k}$ (3)

振幅は $\frac{3mg}{k}-\frac{mg}{k}=\frac{2mg}{k}$ *1 (4)　周期は $2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$ *2 (5)

問3 運動方程式は $2ma=2mg-N$ *3 (6) ―①　$ma=mg+N-kx$ *3 (7) ―②

②より $2ma=2mg+2N-2kx$ ―②'

①,②'より $2N-2kx=-N$　$N=\frac{2}{3}kx$

おもりが板から離れるのは $N=0$ のときだから、その位置は $x=0$ (8)

$x=0$ でのおもりと板の速さをv_0とすると、力学的エネルギー保存則より

$3mg\cdot(-x_0)+\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}\cdot3m\cdot v_0^2$ *4 ―③

最高点の位置を$x_2(<0)$とすると、力学的エネルギー保存則より

$\frac{1}{2}\cdot2m\cdot v_0^2=2m\cdot g\cdot(-x_2)$ ―④

③より $\frac{1}{2}mv_0^2=-mgx_0+\frac{1}{6}kx_0^2$ ―③'

④より $\frac{1}{2}mv_0^2=-mgx_2$ ―④'

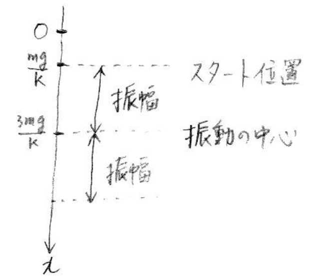
③',④'より $mgx_2=mgx_0-\frac{1}{6}kx_0^2$ ∴ $x_2=x_0-\frac{kx_0^2}{6mg}$ (9)

振幅は $x_0-\frac{3mg}{k}$ だから、一体の運動が続くと仮定した場合の最高点の位置は

$\frac{3mg}{k}-\left(x_0-\frac{3mg}{k}\right)=\frac{6mg}{k}-x_0$ である。よって離れる条件は *5

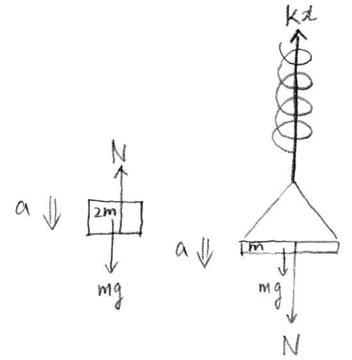
$\frac{6mg}{k}-x_0<0$ すなわち $x_0>\frac{6mg}{k}$ (10)

*1



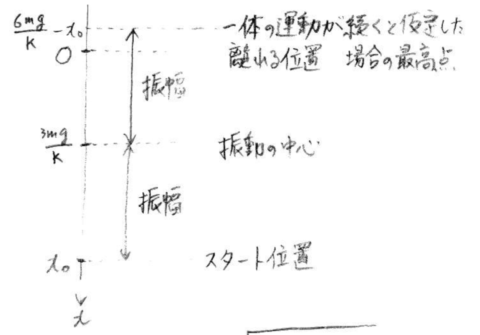
*2 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (公式)

*3



*4 左辺は $x=x_0$、右辺は $x=0$ のとき。

*5



(10)別解 ③より、$v_0=\sqrt{\frac{kx_0^2}{3m}-2gx_0}$

離れる条件は $v_0>0$ すなわち

$\frac{kx_0^2}{3m}>2gx_0$　$x_0>\frac{6mg}{k}$